

4. cvičení - řešení

Vše až na 3. příklad má vzorové řešení zde:

https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/1920LS_MA2/04_reseni.pdf

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní řady. Rozhodněte, zda musí platit:

Příklad 3 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$ je konvergentní.

Z Věty 7.1 plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ diverguje nebo není rovna 0. Lze pak snadno ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + c_n)$ též diverguje, nebo není rovna 0. Z téže věty pak plyne, že daná řada diverguje.

Konkrétním příkladem je $a_n = \frac{1}{n^2}, d_n = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Přičemž konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne z 7.6.

Příklad 3 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$ je divergentní.

Analogicky jako 3 (a).

Příklad 3 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ je konvergentní.

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $s_k = \sum_{n=1}^k a_n, S_k = \sum_{n=1}^k b_n$. Pak platí $\sum_{k=1}^n (a_n - b_n) = s_k - S_k$. Jelikož řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k \in \mathbb{R}$ a $\sum_{k=1}^{\infty} S_k \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (a_n - b_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - S_k) \in \mathbb{R}$. Tím máme dokázáno, že $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ konverguje.

Příklad 3 (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n + l \cdot b_n)$, kde $k, l \in \mathbb{R}$, je konvergentní.

Analogicky jako 3 (c). Lze indukcí dokázat, že $\sum_{n=1}^k l \cdot a_n = l \sum_{n=1}^k a_n$.

Příklad 3 (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ je konvergentní.

Volme $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak z Věty 7.7 a Věty 7.6 plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují. Nicméně řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje dle Věty 7.6.

Příklad 3 (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cdot d_n)$ je konvergentní.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cdot d_n)$ nemusí být konvergentní - např. pokud $c_n = d_n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 3 (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot d_n)$ je konvergentní.

Lze volit např. $b_n = \frac{1}{n^2}, d_n = n$. Pak dle Věty 7.6 řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ diverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot d_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.